

# La matematica nell'estetica dei suoni

Lucio Cadeddu

## Introduzione

Nell'immaginario collettivo la matematica e la musica sono due discipline ritenute quasi antipodali: fredda e rigorosa la prima, emozionante e fantasiosa la seconda. Nella realtà, tuttavia, le due discipline sono sempre state molto vicine l'una all'altra e oggi, soprattutto dopo l'avvento delle tecnologie digitali, il legame si è profondamente rafforzato. In questo articolo si metteranno in evidenza le profonde interrelazioni tra le due discipline dal punto di vista dell'estetica dei suoni generati dalla musica, soffermandosi in particolare sul concetto di qualità percepita per mezzo dei nuovi formati digitali.

## Rappresentazione del mondo reale

Da sempre l'uomo si è sforzato di rappresentare gli avvenimenti e le percezioni del mondo fisico tramite grandezze, misurazioni, proporzioni e confronti. Le prime unità di misura erano certamente *analogiche*. Il termine si può far risalire al sec. XVIII e deriva dal greco *analogikós*, proprio dell'analogia, che si fonda sull'analogia, sulla proporzione (*análogos*). In altre parole si misura una grandezza fisica ponendola in correlazione proporzionale con un'altra. Le seguenti grandezze fisiche possono essere rappresentate tramite trasformazioni analogiche:

TEMPERATURA → ALTEZZA (della colonna di mercurio di un termometro);



PRESSIONE ACUSTICA ➡ INTENSITÀ di un segnale elettrico (microfono o altoparlante);

TEMPO ➡ POSIZIONE delle lancette dell'orologio.

Una grandezza fisica, tuttavia, può essere agevolmente e, talvolta, più convenientemente, rappresentata mediante un insieme discreto di numeri, ad esempio:

TEMPO ➡ ore, minuti, secondi (1 giorno = 86.400 cifre);

INTENSITÀ SONORA ➡ n° finito di "passi" di un potenziometro;

VELOCITÀ ➡ n° finito di cifre di un tachimetro.

Questo tipo di proporzionalità prende il nome di rappresentazione digitale (dal latino *digitālis*, proprio di un dito (*digitus*) o delle dita; nel sec. XX dall'inglese *digit*, cifra).

La rappresentazione *digitale* ha lentamente ma inesorabilmente preso il sopravvento su quella *analogica*, soprattutto quando si tratta di immagazzinare informazioni su supporti multimediali o su computer. Di conseguenza, suoni, immagini statiche e filmati possono essere convertiti in sequenze di numeri e conservati inalterati, copiati senza possibilità di errore e trasmessi a distanza. In pratica tutto ciò che ascoltiamo e vediamo oggi è una rappresentazione digitalizzata (*quantizzata*) della realtà.

L'esigenza di *quantizzare*, ovvero di rappresentare digitalmente, con sequenze numeriche, dati nativi *analogici*, nacque, negli USA, intorno agli anni '40 per scopi militari. Durante la seconda guerra mondiale trasmettere a distanza informazioni, senza possibilità di errori nella comunicazione, era un'esigenza bellica fortissima. Gli ordini dati alle truppe da una parte all'altra dell'Atlantico dovevano poter essere trasmessi in modo nuovo, veloce, economico e sicuro.

Come digitalizzare le informazioni, ad esempio i messaggi audio, fu uno dei cardini dell'attività di ricerca di Claude Elwood Shannon, matematico e ingegnere americano che pubblicò il "teorema del campionamento" sui *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* (Shannon 1949), come seguito della sua opera monumentale "A

Mathematical Theory of Communication” (Shannon 1948). La sua prima formulazione originale risale tuttavia al 1940. Tutto può essere ricondotto al matematico E.T. Whittaker e al suo studio sulle serie (funzioni) cardinali (Whittaker 1915), dove il matematico britannico riusciva ad associare una sequenza infinita di numeri a un *segnale* continuo.

Risultati analoghi furono scoperti da F. J. W. Whipple ben cinque anni prima ma non furono mai pubblicati. Inoltre, cinque anni dopo il lavoro di Whittaker, il matematico giapponese K. Ogura pubblicò (Ogura 1920) un lavoro nel quale per la prima volta si diedero delle condizioni affinché la serie formale di numeri esprimesse effettivamente la funzione (il *segnale* ovvero l’informazione analogica) data. Lo stesso Ogura, curiosamente, attribuì questo risultato al precedente lavoro di Whittaker.

Nel 1928 Harry Nyquist definì il legame tra massima frequenza del segnale da digitalizzare e frequenza di campionamento (Nyquist 1928). Fu solo nel 1948 che Shannon riorganizzò i risultati in linguaggio moderno e trovò le applicazioni al campo delle comunicazioni. Alla fine degli anni ‘50, nella comunità scientifica occidentale giunse però la notizia che, nel 1933, un ingegnere russo, V. Kotel’nikov, trovò e applicò il teorema del campionamento in maniera indipendente (Kotel’nikov 1933).

Per questa ragione il teorema di Shannon è spesso chiamato WNKS (Whittaker-Nyquist-Kotel’nikov-Shannon). Per una panoramica approfondita e una precisa cronistoria del teorema del campionamento si veda il recente *survey paper* di Michael Unser (Unser 2000). In apertura, Unser così riassume il contributo del lavoro di Shannon al progresso delle comunicazioni:

It is undoubtedly one of the theoretical works that has had the greatest impact on modern electrical engineering. In order to formulate his rate/distortion theory, Shannon needed a general mechanism for converting an analog signal into a sequence of numbers (Unser 2000: 1).

Esponiamo in breve e con le dovute approssimazioni un'idea del come si possa giungere a questo straordinario risultato del trasformare tutta la realtà sensibile in sequenze di numeri.

Per semplicità, immaginiamo di voler convertire un messaggio sonoro in una sequenza *digitale*. Il messaggio è un segnale analogico quando viene captato da un microfono e da esso è trasformato in un segnale elettrico variabile nel tempo. Tale segnale elettrico, in estrema semplificazione, è un'onda che varia nel tempo. Per trasformare quest'onda variabile in numeri si procede a *fotografarla* un elevato numero di volte al secondo, come se si facessero tante istantanee di un'immagine in movimento. Ognuna di tali istantanee è associata a un numero (questo sarebbe il valore dell'onda campionata) e la sequenza di numeri è il nostro codice digitale.

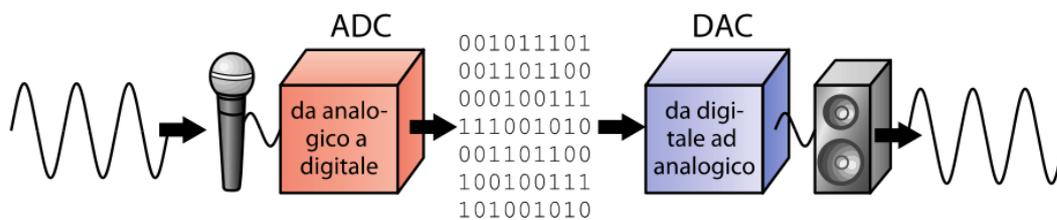


Fig. 1 – Schema a blocchi della conversione ADC/DAC (elab. L. Cadeddu).

Nel diagramma in Fig. 1 questo compito viene svolto da un dispositivo elettronico che si chiama ADC (*Analog to Digital Converter*, ossia convertitore da analogico a digitale). Una volta che il segnale è convertito in una sequenza numerica può essere trasmesso a distanza, senza errori, immagazzinato dentro un supporto digitale (CD/DVD, USB drive, hard disk) ed eventualmente riconvertito nel segnale analogico originario grazie a un processo inverso, detto conversione digitale analogica, svolta da un dispositivo denominato DAC (*Digital to Analog Converter*).

Dopo questo ultimo passaggio la sequenza di numeri è nuovamente un segnale elettrico variabile che può essere amplificato e

inviato a un altoparlante che riprodurrà nuovamente il messaggio audio originale, con una procedura di conversione elettro-meccanica analogica (ma inversa) rispetto a quella realizzata dal microfono.

Questo procedimento, permesso dal teorema di Shannon, è alla base di tutte le comunicazioni delle quali facciamo uso ogni giorno, dalla telefonia, all’ascolto della musica, dalla visione dei film alla condivisione di video e suoni su Web. Più precisamente, il teorema fornisce delle fondamentali indicazioni sulla frequenza con la quale si dovrebbe *fotografare* (campionare) un segnale analogico tempo continuo in maniera tale che la sua successiva ricostruzione, passando nuovamente da numeri (tempo discreto) a valori analogici, sia esente da errori, perdita o surplus di informazioni (il cosiddetto fenomeno dell'*aliasing*). Tale minima frequenza, detta “frequenza di Nyquist”, deve essere strettamente maggiore del doppio della frequenza massima del segnale che si intende campionare. Ad esempio, un segnale sonoro con frequenza massima di 20.000 Hz (il segnale più acuto che l'orecchio umano possa percepire) dovrà essere campionato almeno 40.001 volte al secondo. Per questa ragione la frequenza di campionamento utilizzata nei Compact Disc è stata fissata in 44.100 Hz, consentendo pertanto la perfetta ricostruzione di un segnale audio con frequenza massima di 22.050 Hz.

### **Breve cronistoria dei supporti audio**

Sin dalla metà del 1800 l’uomo si è posto il problema del come rendere ripetibile un evento sonoro o musicale. Negli anni i dispositivi realizzati per questo scopo sono stati numerosi, di seguito proponiamo una breve cronistoria dei supporti audio per la registrazione e la riproduzione della musica:

1857/1895 (Edison-Berliner): fonografo a cilindro e su disco (78 giri)

1925: registrazione elettrica, via microfono

1935: registrazione analogica su nastro magnetico

1948/1950: disco in vinile (33 giri contro 45 giri)

- 1963: registrazione analogica su *compact cassette*
- 1982: registrazione digitale su CD
- 1987: registrazione digitale su cassetta (DAT)
- 1993: MPEG-1 Audio Layer III (MP3)
- 1999/2004: formati *lossless* (FLAC, ALAC etc.)

La storia dei supporti audio, come qui riassunta, è controversa, in quanto non sempre la soluzione qualitativamente migliore ha avuto il sopravvento. Spesso sono stati adottati come *industry standard* dei sistemi qualitativamente inferiori ma economicamente più convenienti. Per citare un esempio classico, sia sufficiente ricordare come il disco 33 giri (il cosiddetto *LP microsolco*) fu preferito ai formati concorrenti (45 e 78 giri) principalmente perché nello stesso spazio fisico consentiva di immagazzinare più minuti di musica e non perché la qualità della riproduzione fosse superiore.

Più recentemente, il successo dello standard digitale MP3 è tutto da attribuire alla praticità di questa soluzione tecnica più che alla qualità del risultato estetico-musicale.

### **Dallo standard CD a MP3**

Nel 1993 un gruppo di ricercatori del Fraunhofer Institute mise a punto un sistema per ridurre lo spazio necessario per immagazzinare dati digitali relativi a video e suoni. Il contenuto standard di un comune CD Audio ammonta a circa 650 Mb di dati, una quantità che rende assolutamente poco pratica e conveniente la trasmissione a distanza. Codificando convenientemente questa mole di dati in standard mp3 lo spazio occupato si può ridurre di un fattore 10, ovvero un CD Audio si può contenere in appena 65 Mb.

Per ridurre in maniera così drastica lo spazio occupato occorre ricorrere a diverse soluzioni che, di fatto, abbassano la qualità del messaggio musicale contenuto nel CD, escludendo intere porzioni dell'informazione ivi immagazzinata. In estrema sintesi, queste sono le strategie per raggiungere il risultato finale:

- 1) Il messaggio audio viene suddiviso in 32 bande di segnale, e si implementa un’analisi dello stesso escludendo alcune porzioni di frequenze che sarebbero quasi inudibili a causa del cosiddetto “effetto mascheramento” (un suono forte molto vicino in frequenza maschera la presenza di un suono più debole). Si veda Fig. 2.



Fig. 2 - Un segnale forte, vicino in frequenza, maschera uno debole (elab. L. Cadeddu).

- 2) Si applica il cosiddetto *Joint Stereo coding* (Intensity Stereo e Mid/Side stereo). In pratica, al di sotto di una certa frequenza, il segnale a due canali (stereofonico, destro-sinistro) viene unificato e trasformato in monofonico. Si sfrutta in questo modo l’incapacità fisiologica dell’orecchio umano di discernere in maniera precisa la provenienza di un suono a bassa frequenza. La codifica *Mid\Side* sfrutta il fatto che le differenze di informazione tra canale destro R e sinistro L sono piccole e pertanto se ne codifica uno solo, insieme alla differenza tra i due (L-R), arrivando quasi a dimezzare lo spazio impiegato per la codifica di due canali completamente separati.
- 3) Si applica infine una compressione dei dati, detta di Huffman, di tipo *lossless*, ovvero senza perdita di informazione (equivalente alle compressioni .zip o .rar dei file di dati).

Tutto questo, come preannunciato, porta a una riduzione massima teorica dello spazio necessario di un fattore 10:1, un vantaggio enorme, ottenuto però a scapito della qualità. Questo vantaggio logistico ha tuttavia consentito allo standard MP3 di ottenere un larghissimo successo industriale e commerciale, con inevitabili conseguenze che andiamo a esaminare.

### Conseguenze

Un sottoprodotto della possibilità di disporre di file musicali a basso costo e dal ridotto ingombro ha fatto esplodere il fenomeno della cosiddetta *piped music* (detta anche *canned music*) ovvero la musica diffusa in continuazione come sottofondo in luoghi pubblici, esercizi commerciali, aeroporti ecc. Per *piped music* o *canned music* si intende, letteralmente, musica in scatola, intubata. La sostituzione del silenzio naturale con musica di bassa qualità a basso costo ha avuto e continua ad avere ricadute disastrose sia sul mondo della musica stessa, sia sulla capacità di concentrazione e sul conseguente rendimento lavorativo dei lavoratori esposti a questo genere di inquinamento ambientale continuo.

In una recente ricerca condotta da Nick Perham e Joanne Vizard dell'Università di Cardiff, dal titolo *Can Preference for Background Music Mediate the Irrelevant Sound Effect?*, circa gli effetti del rendimento cognitivo in ambienti inquinati da *piped music* si evidenzia come la capacità di memorizzare e ricordare sequenze anche molto semplici di informazioni è influenzata negativamente dal rumore ambientale sotto forma di musica di sottofondo (Perham 2010: 1).

Results revealed performance to be poorer for both music conditions and the changing-state speech compared to quiet and steady-state speech conditions. The lack of difference between both music conditions suggests that preference does not affect serial recall performance.

Il mondo della musica ha persino prodotto opere destinate esclusivamente alla fruizione pubblica tramite *piped music*. Si ricordano

*Music for airports* di Brian Eno (1978, Polydor) e la *Music for elevators* della Muzak Holding Corporation, attiva già a partire dagli anni '30 negli Stati Uniti.

La *Music for airports* era nata in esatta contrapposizione all'offerta artistica di basso livello prodotta dalla Muzak Holdings Corp., come lo stesso Eno ebbe modo di sottolineare nelle note che accompagnavano il suo lavoro "Music for Airports / Ambient 1", PVC 7908 (AMB 001) (1978).

The concept of music designed specifically as a background feature in the environment was pioneered by Muzak Inc. in the fifties, and has since come to be known generically by the term Muzak. The connotations that this term carries are those particularly associated with the kind of material that Muzak Inc. produces – familiar tunes arranged and orchestrated in a lightweight and derivative manner. Understandably, this has led most discerning listeners (and most composers) to dismiss entirely the concept of environmental music as an idea worthy of attention.

Over the past three years, I have become interested in the use of music as ambience, and have come to believe that it is possible to produce material that can be used thus without being in any way compromised. To create a distinction between my own experiments in this area and the products of the various purveyors of canned music, I have begun using the term Ambient Music (Eno 1978).

Sfortunatamente gli sforzi di Brian Eno restarono confinati nella nicchia dei cultori della musica colta e così gli spazi pubblici continuarono ad essere invasi da suoni a basso costo e dal contenuto artistico trascurabile. In tempi recenti è aumentata notevolmente la sensibilità dei consumatori nei confronti dell'inquinamento acustico ambientale sotto forma di *piped music*.

A Linz, in Austria, nel 2009, prende vita il progetto Hörstadt, la cosiddetta "Acoustic City": negozi, locali pubblici e ristoranti eliminano la musica di sottofondo e si creano nella città delle aree silenziose dove la *piped music* è vietata. La responsabile del progetto, Eva Lichtenberger, ne spiega le motivazioni in un'intervista concessa all'European Greens Party presso il Parlamento Europeo:

According to European statistics 125 million inhabitants are acoustically disabled – a quarter of the whole European population! A third of all heart – and circulation – related diseases are due to acoustic stress, nevertheless there is almost no political reaction. The Linz-project is not about noise and how to avoid it. It is not an attempt to create absolute silence – it is about freedom of choice (Lichtenberger 2009).

Sulla stessa falsariga si muove l'organizzazione di consumatori Pipedown, fondata a Salisbury, in Inghilterra. Tra le attività nate in seno a tale organizzazione si nota la stampa di diverse guide turistiche "Quiet Towns" che elencano i luoghi pubblici silenziosi nelle seguenti città: Londra, New York, Parigi e Amsterdam. Pipedown si fa portavoce, presso le istituzioni e il mondo dell'industria, della *Campaign for freedom from piped music in public places*, un primo tentativo di far calare drasticamente i livelli di *piped music* nei luoghi pubblici.

## Conclusioni

La matematica e i suoni hanno da sempre mostrato un legame indissolubile, sin da quando i primi Pitagorici codificarono le note musicali, associandole a frazioni di lunghezza di una corda. I diversi toni di una scala erano pertanto collegati ai rapporti tra numeri interi (i cosiddetti *numeri razionali*) in maniera tale che, ad esempio, una corda dimezzata suona l'ottava superiore, ridotta ai suoi  $\frac{3}{4}$  la quarta, ridotta ai suoi  $\frac{2}{3}$  la quinta ecc.

Oltre 2000 anni dopo, tutta la musica attuale viene codificata, trasformata in numeri binari e trasmessa grazie ad algoritmi matematici che si basano sul teorema di Shannon, il quale consente di trasformare la realtà di un evento sonoro in una sequenza di bit che ne permettono la perfetta ricostruzione. L'abuso di sofisticati e complessi algoritmi di compressione dei dati, invece, ha impoverito la struttura armonica dei suoni e ha facilitato la diffusione della cosiddetta *piped music*. Oggi, grazie ad algoritmi di compressione *lossless* (senza perdita di

informazione) è possibile immagazzinare, senza alcun impoverimento qualitativo, una gran quantità di musica in spazi estremamente contenuti. Ad esempio, i dati di 3000 Compact Disc musicali possono essere compressi in formato .flac (acronimo per *Free Lossless Audio Codec*) e contenuti in uno spazio fisico di appena 1 Terabyte.

Da questo punto, e dalla lotta all’inquinamento sonoro, si può ripartire per dare nuova dignità alla musica e al suo ruolo principe nella vita di ogni individuo.

## Bibliografia

- Kotel'nikov 1933 = V. A. Kotel'nikov, *On the Carrying Capacity of the "Ether" and Wire in Telecommunications*, Material for the First All-Union Conference on Questions of Communications, Izd. Red. Izd. Red. Upravlenie Svyazi RKKA, Moscow 1933.
- Nyquist 1928 = H. Nyquist, *Certain topics in telegraph transmission theory*, "Transactions of the American Institute of Electrical Engineers", vol. 47, Apr. 1928, pp. 617-644; reprint in "Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers", vol. 90, n. 2, Feb. 2002.
- Ogura 1920 = K. Ogura, *On the theory of interpolation*, "Tôhoku Math. J.", vol. 17, 1920, pp. 129-145.
- Perham, Vizard 2010 = N. Pehram, J. Vizard, *Can Preference for Background Music Mediate the Irrelevant Sound Effect?*, "Applied Cognitive Psychology", vol. 25, issue 4, 2011, pp. 625-631, published online: July 20, 2010 in Wiley Online Library (DOI: 10.1002/acp.1731).
- Shannon 1948 = C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, "The Bell System Technical Journal", vol. 27, n. 3, 1948, pp. 379-423, 623-656.
- Shannon 1949 = C. E. Shannon, *Communication in the Presence of Noise*, "Proceedings of the Institute of Radio Engineers", vol. 37, 1949, pp. 10-21; <http://nms.csail.mit.edu/spinal/shannonpaper.pdf>
- Unser 2000 = M. Unser, *Sampling-50 years after Shannon*, "Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers", vol. 88, n. 4, 2000, pp. 569-587.
- Whittaker 1915 = E. T. Whittaker, *On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory*, "Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A", vol. 35, 1915, pp. 181-194.

## Sitografia

Eno 1978 = B. Eno, *Music for Airports / Ambient 1*,  
[http://music.hyperreal.org/artists/brian\\_eno/MFA-txt.html](http://music.hyperreal.org/artists/brian_eno/MFA-txt.html) (ultimo  
accesso il 30/09/2014).

Lichtenberger 2009 = E. Lichtenberger,  
[http://europeangreens.eu/news/acoustic-cityh%C3%B6rstadt-  
initiative-linz-austria](http://europeangreens.eu/news/acoustic-cityh%C3%B6rstadt-initiative-linz-austria) (ultimo accesso il 30/09/2014)

Pipedown: <http://www.pipedown.info>

Flac: Free Lossless Audio Codec, <https://xiph.org/flac/>

## L'autore

### Lucio Cadeddu

Docente di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Matematica e Informatica della Facoltà di Scienze dell'Università degli Studi di Cagliari. Autore di diverse pubblicazioni su riviste scientifiche internazionali, svolge la sua attività di ricerca nel campo delle equazioni alle derivate parziali. Si occupa di studiare i legami tra musica e matematica. Editore e direttore responsabile della rivista di divulgazione tecnico-scientifica TNT-Audio ([www.tnt-audio.com](http://www.tnt-audio.com)).

Email: [cadeddu@unica.it](mailto:cadeddu@unica.it)

## L'articolo

Data invio: 10/10/2014

Data accettazione: 20/11/2014

Data pubblicazione: 30/06/2015

## **Come citare questo articolo**

Cadeddu, Lucio, *La matematica nell'estetica dei suoni*, "Medea", I, 1, 2015,  
DOI: <http://dx.doi.org/10.13125/medea-1853>